Prof. Dr. Alfred Toth

Punktierte, gerichtete und invertierte Objekte

Dem treuen Andenken an Prof. Dr. Linus Brunner (†3.12.1987) gewidmet.

1. Semiotische Objekte (die Peirceschen „Universalkategorien“ Erstheit, Zweitheit, Drittheit) können als punktierte Objekte eingeführt werden (Lawvere 1997, S. 2):

$1 \rightarrow_0 T$

$2 \rightarrow_0 T$

$3 \rightarrow_0 T$

Dies ist eine Formalisierung der von Fichte rein metaphysisch eingeführten „thetischen Setzung“.

2. Spuren, Keime und Kategorien. Wir setzen:

$Sp = (x \in X, \rightarrow)$

$Ke = (y \in Y, \rightarrow)$

$Cat = (x \in X, y \in Y, \rightarrow)$

Eine Spur ist damit eine Kategorie ohne Urbildbereich, ein Keim ist eine Kategorie ohne Bildbereich. Damit ist eine Kategorie aus einem Spuren- und einem Keimteil zusammengesetzt. Formal kann man die Enstehung von Spuren aus der kartesischen Multiplikation von Triaden und präsemiotischen Trichotomien erklären:

$1. \times 0.1 = 1_1$	$2. \times 0.1 = 2_1$	$3. \times 0.1 = 3_1$
$2. \times 0.2 = 1_2$	$2. \times 0.2 = 2_2$	$3. \times 0.2 = 3_2$
$3. \times 0.3 = 1_3$	$2. \times 0.3 = 2_3$	$3. \times 0.3 = 3_3$

Dagegen entstehen Keime aus der kartesischen Multiplikation von Trichotomien und präsemiotischen Trichotomien:

$.1 \times 0.1 = {}_{1}1$	$.2 \times 0.1 = {}_{2}1$	$.3 \times 0.1 = {}_{3}1$
$.2 \times 0.2 = {}_{1}2$	$.2 \times 0.2 = {}_{2}2$	$.3 \times 0.2 = {}_{3}2$
$.3 \times 0.3 = {}_{1}3$	$.2 \times 0.3 = {}_{2}3$	$.3 \times 0.3 = 33$

Kategorien entstehen also durch Zusammensetzung von Spuren und Keimen bzw. umgekehrt:

Cat = $(x_{\rightarrow} \square\square {}_{y}\rightarrow) = (x \rightarrow y), x \in X, y \in Y$.

Im einzelnen haben wir:

$(1.1) = \mathrm{id}1 \quad \rightarrow \quad 1_{\rightarrow 1}$

$(1.2) = \alpha \quad \rightarrow \quad 1_{\rightarrow 2}$

$(1.3) = \beta\alpha \quad \rightarrow \quad 1_{\rightarrow 3}$

$(2.1) = \alpha° \quad \rightarrow \quad 2_{\rightarrow 1} = 1_{\leftarrow 2}$

$(2.2) = \mathrm{id}2 \quad \rightarrow \quad 2_{\rightarrow 2}$

$(2.3) = \beta \quad \rightarrow \quad 2_{\rightarrow 3}$

$(3.1) = \alpha°\beta° \quad \rightarrow \quad 3_{\rightarrow 1} = 1_{\leftarrow 3}$

$(3.2) = \beta° \quad \rightarrow \quad 3_{\rightarrow 2} = 2_{\leftarrow 3}$

$(3.3) = \mathrm{id}3 \quad \rightarrow \quad 3_{\rightarrow 3}$

Mit Hilfe dieser Entsprechungen können wir sog. Spurenmatrizen aufstellen:

$$\begin{pmatrix} \varnothing_{\rightarrow 1} & 1_{\rightarrow 1} & 1_{\rightarrow 2} & 1_{\rightarrow 3} \\ \varnothing_{\rightarrow 2} & 1_{\leftarrow 2} & 2_{\rightarrow 2} & 2_{\rightarrow 3} \\ \varnothing_{\rightarrow 3} & 1_{\rightarrow 3} & 2_{\leftarrow 3} & 3_{\rightarrow 3} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1_{\rightarrow \varnothing} & 2_{\rightarrow \varnothing} & 3_{\rightarrow \varnothing} \\ 1_{\rightarrow 1} & 2_{\rightarrow 1} & 3_{\rightarrow 1} \\ 1_{\rightarrow 2} & 2_{\rightarrow 2} & 3_{\rightarrow 2} \\ 1_{\rightarrow 3} & 2_{\rightarrow 3} & 3_{\rightarrow 3} \end{pmatrix}$$

3. Nullzeichen (Nullspuren, Nullkeime). Bisher können wir Zeichenklassen mit folgenden Objekten bilden:

1. Zeichenklassen der Form Zkl = (3.a 2.b 1.c)

2. Realitätsthematiken der Form Rth = (c.1 b.2 a.3)

3. Zeichenklassen-Spuren der Form $Zkl_{Sp} = (3_{\rightarrow a}\ 2_{\rightarrow b}\ 1_{\rightarrow c})$

4. Realitätsthematiken-Spuren der Form $Rth_{Sp} = (1_{\rightarrow c}\ 2_{\rightarrow b}\ 3_{\rightarrow a})$

5. Zeichenklassen-Spuren mit inversen Abbildungen der Form

   $Zkl_{Sp} = (3_{\leftarrow a}\ 2_{\leftarrow b}\ 1_{\leftarrow c}), (3_{\leftarrow a}\ 2_{\rightarrow b}\ 1_{\leftarrow c})$, usw.

6. Realitätsthematiken-Spuren mit inversen Abbildungen der Form

   $Rth_{Sp} = (1_{\leftarrow c}\ 2_{\leftarrow b}\ 3_{\leftarrow a}), (1_{\rightarrow c}\ 2_{\leftarrow b}\ 3_{\rightarrow a})$, usw.

7. Spuren-Zeichenklassen der Form $Zkl_{Sp} = (\rightarrow a_3 \rightarrow b_2 \rightarrow c_1)$

8. Spuren-Realitätsthematiken der Form $Rth_{Sp} = (\rightarrow c_1 \rightarrow b_2 \rightarrow a_3)$

9. Spuren-Zeichenklassen mit inversen Abbildungen der Form

$Zkl_{Sp} = (\leftarrow a_3 \leftarrow b_2 \leftarrow c_1), (\leftarrow a_3 \rightarrow b_2 \leftarrow c_1)$, usw.

10. Spuren-Realitätsthematiken mit inversen Abbildungen der Form

    $Rth_{Sp} = (\leftarrow c_1 \leftarrow b_2 \leftarrow a_3), (\rightarrow c_1 \leftarrow b_2 \rightarrow a_3)$, usw.

Nullzeichen wurden einerseits in Zeichenklassen, d.h. in undualisierter Form als $\varnothing_{\rightarrow 1}$, $\varnothing_{\rightarrow 2}$, $\varnothing_{\rightarrow 3}$, anderseits in Realitätsthematiken, d.h. in dualisierter Form als $1_{\rightarrow\varnothing}$, $2_{\rightarrow\varnothing}$, $3_{\rightarrow\varnothing}$ eingeführt. Allerdings sind die Nullzeichen im letzteren Fall selber nicht indiziert, d.h. haben keine eigene Codomäne. Wenn man dem abhilft, d.h. $1_{\rightarrow\varnothing\rightarrow 1}$, $2_{\rightarrow\varnothing\rightarrow 2}$, $3_{\rightarrow\varnothing\rightarrow 3}$ einführt, bekommt man sog. Bi-Spuren. Entsprechend kann man dann Bi-Spuren für sämtliche Spuren (1. bis 10.) verallgemeinern.

Wir wollen nun Nullzeichen analog zu den Nicht-Null-Spuren einführen.

1. Zeichenklassen der Form Zkl = (3.a 2.b 1.c ∅.d),

    wobei hier zwischen partiellen und vollständigen zu unterscheiden ist:

    (3.a 2.b ∅.c ∅.d), (3.a ∅.b ∅.c ∅.d), (∅.a ∅.b ∅.c ∅.d), und gemischte.

2. Realitätsthematiken der Form Rth = (c.1 b.2 a.3), d.h.

    (d.∅ c.1 b.2 a.3), (d.∅ c.∅ b.2 a.3), (d.∅ c.∅ b.∅ a.3), (d.∅ c.∅ b.∅ a.∅),

    und gemischte, sowie mit/ohne Indizierung des Nullzeichens (vgl. 3.).

3. Zeichenklassen-Spuren der Form $Zkl_{Sp} = (3_{\rightarrow\varnothing}\ 2_{\rightarrow\varnothing}\ 1_{\rightarrow\varnothing})$, wobei hier die Nullzeichen indiziert oder nichtindiziert sein können (vgl. 3.). Ferner

    $(\varnothing_{\rightarrow I}\ \varnothing_{\rightarrow O}\ \varnothing_{\rightarrow M})$, sowie Kombinationen.

4. Realitätsthematiken-Spuren der Form $Rth_{Sp} = (1_{\rightarrow c}\ 2_{\rightarrow b}\ 3_{\rightarrow a})$. $(\varnothing_{\rightarrow c}\ \varnothing_{\rightarrow b}\ \varnothing_{\rightarrow a})$ oder $(1_{\rightarrow\varnothing}\ 2_{\rightarrow\varnothing}\ 3_{\rightarrow\varnothing})$, usw.

5. Zeichenklassen-Spuren mit inversen Abbildungen der Form

    $Zkl_{Sp} = (3_{\leftarrow a}\ 2_{\leftarrow b}\ 1_{\leftarrow c}), (3_{\leftarrow a}\ 2_{\rightarrow b}\ 1_{\leftarrow c})$, usw. Entsprechend zu 4.1. bis 4.4.

6. Realitätsthematiken-Spuren mit inversen Abbildungen der Form

$Rth_{Sp} = (1_{\leftarrow c}\ 2_{\leftarrow b}\ 3_{\leftarrow a}), (1_{\rightarrow c}\ 2_{\leftarrow b}\ 3_{\rightarrow a})$, usw. Entsprechend zu 4.1. bis 4.4.

7. Spuren-Zeichenklassen der Form $Zkl_{Sp} = (\rightarrow\varnothing_3 \rightarrow\varnothing_2 \rightarrow\varnothing_1)$

8. Spuren-Realitätsthematiken der Form $Rth_{Sp} = (\rightarrow\varnothing_1 \rightarrow\varnothing_2 \rightarrow\varnothing_3)$

9. Spuren-Zeichenklassen mit inversen Abbildungen der Form

   $Zkl_{Sp} = (\leftarrow\varnothing_3 \leftarrow\varnothing_2 \leftarrow\varnothing_1), (\leftarrow\varnothing_3 \rightarrow\varnothing_2 \leftarrow\varnothing_1)$, usw.

10. Spuren-Realitätsthematiken mit inversen Abbildungen der Form

   $Rth_{Sp} = (\leftarrow\varnothing_1 \leftarrow\varnothing_2 \leftarrow\varnothing_3), (\rightarrow\varnothing_1 \leftarrow\varnothing_2 \rightarrow\varnothing_3)$, usw.

Zu 4.7.-4.10. stellt sich die generelle Frage nach der Indizierung von $\varnothing$ in Ausdrücken wie $(\rightarrow\varnothing_3 \rightarrow\varnothing_2 \rightarrow\varnothing_1)$ oder $(\rightarrow\varnothing_1 \rightarrow\varnothing_2 \rightarrow\varnothing_3)$, wo die folgenden Ausdrücke wegen den definitorisch fehlenden Domänen semiotisch äquivalent sind: $(\varnothing_{\rightarrow\varnothing 3}, \varnothing_{\rightarrow\varnothing 2}, \varnothing_{\rightarrow\varnothing 1})$, usw. Wenn man hier die Domänen indiziert, erhält man wiederum Bi-Spuren (vgl. 3.), hier allerdings von den Domänen und nicht von den Codomänen her, womit beide möglichen Fälle behandelt sind.

Spuren-Zeichenobjekte neben Spuren-Objektzeichen

$ZO_{Sp} = (\rightarrow a_{<M, \mathcal{M}>}, \rightarrow b_{<O, \Omega>}, \rightarrow c_{<I, \mathcal{I}>})$

$OZ_{sp} = (\rightarrow a_{<\mathcal{M}, M>}, \rightarrow b_{<\Omega, O>}, \rightarrow c_{<\mathcal{I}, I>})$

Objekt-Spuren neben Spuren-Objekten

$OR_{sp} = (\mathcal{M}_{\rightarrow a}, \Omega_{\rightarrow b}, \mathcal{I})$

$Sp_{OR} = (_{\rightarrow}a, _{\rightarrow}b, _{\rightarrow}c) \equiv (\rightarrow a_{\mathcal{M}}, \rightarrow b_{\Omega}, \rightarrow c_{\mathcal{I}})$.

4. In einer 2-dimensionalen Semiotik wie derjenigen von Peirce gibt es nur 2 Typen von Primzeichen:

- die triadischen, welche nach rechts binden: a.

- die trichotomischen, welche nach links binden: .a

Diese können zu folgenden 4 Verbindungen kombiniert werden:

- a.a. - a..a
- .a.a - .aa.,

wobei also der Fall a..a = a.a, die sog. kartesische Multiplikation, nur einen Sonderfall unter mehreren einnimmt.

2. Gehen wie jedoch von einer 3-dimensionalen Semiotik aus (vgl. Stiebing 1978, S. 77), so finden wir die folgenden 6 Typen von Primzeichen:

- horizontal triadische: a.
- horizontal trichotomische: .a
- vertikal triadische: ȧ
- vertikal trichotomische: ạ
- hinten/vorne triadische: à
- hinten/vorne trichotomische: á.

Diese lassen sich zu 21 Kombinationen dimensionaler semiotischer Objekte verbinden, die in folgender Tabelle zusammengefasst sind:

a.a.					
a..a	.a.a				
a.ȧ	.aȧ	ȧ ȧ			
a.ạ	.aạ	ȧạ	ạạ		
a.à	.aà	ȧà	ạà	àà	
a. á	.aá	ȧá	ạá	àá	áá

Seien nun

S: 3. → 2. → 1.

$\underline{S}^o$: .3 ← .2 ← .1.

Während S ausschliesslich kovariante Morphismen hat, hat $\underline{S}^o$ ausschliesslich kontravariante. Man kann sich also zunächst zwei „gemischte" Kategorien vorstellen:

$\underline{S}^?$: .3 ← .2 → .1

$\underline{S}^{??}$: .3 → .2 ← .1

Da in der Semiotik die Basisrelation n-adischer Relationen für n ≥3 die Dyaden sind (n = 2), müssen wir jedoch auch mit invertierbaren Objekten rechnen. Diese ergeben sich zwangslos in der Semiotik dadurch, dass das Subzeichen zugleich statisch und dynamisch („Semiose") konzipiert ist:

(3.↔1.) →(2.↔2.) → (1.↔3.)

(3.↔1.) → (2.↔2.) ←(1.↔3.)

(3.↔1.) ← (2.↔2.) ←(1.↔3.)

(3.→←.1) →(2. →←.2) →(1.↔3.)

(3.→←.1) →(2. →←.2) ←(1.↔3.)

(3.→←.1) ←(2. →←.2) ←(1.↔3.)

(3.→←.1) →(2.↔.2) →(1.↔.3)

(3.→←.1) →(2.↔.2) ←(1.↔.3)

(3.→←.1) ←(2.↔.2) ←(1.↔.3)

(3.→←.1)→ (2. →←.2) →(1.→←.3)

(3.→←.1)→ (2. →←.2) ←(1.→←.3)

(3.→←.1) ←(2. →←.2) ←(1.→←.3)

(3.↔.1) →(2.↔.2) →(1.→←3.)

(3.↔.1)→ (2.↔.2) ←(1.→←3.)

(3.↔.1)← (2.↔.2) ←(1.→←3.)

(3.↔.1) →(2.→←.2) →(1.→←.3)

(3.↔.1)→ (2.→←.2) ←(1.→←.3)

(3.↔.1)← (2.→←.2) ←(1.→←.3)

Gehen wir wie oben von räumlicher anstatt von nlinearer Semiotik, aus und setzen als Platzhalter für die Position eines der 6 möglichen Primzeichen ⌂, so bekommen wir das folgende allgemeine Schema eines Subzeichens:

⌂ ⌂

⌂3 ⌂ ⌂⌂

⌂ ⌂

Damit ergeben sich also pro Dyade 8^2 = 64 Kombinationen und pro Triade 64^3 = 262´144 Kombinationen semiotischer Objekte.

Bibliographie

Stiebing, Hans Michael, Zusammenfassungs- und Klassifikationsschemata von Wissenschaften und Theorien auf semiotischer und fundamentalkategorialer Basis. Diss. Stuttgart 1978

Toth, Alfred, Semiotics and Pre-Semiotics. 2 Bde. Klagenfurt 2008

Toth, Alfred, Das Nullzeichen. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, http://www.mathematical-semiotics.com/pdf/Nullzeichen2.pdf (2009a)

Toth, Alfred, Von Objekten zu Pfeilen und von Pfeilen zu Spuren.

In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, http://www.mathematical-semiotics.com/pdf/Von%20Obj.%20zu%20Pf.%20u.%20Pf.%20zu%20Spuren.pdf (2009b)

Toth, Alfred Bi-Spuren und dreidimensionale Primzeichen. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, http://www.mathematical-semiotics.com/pdf/Bi-Spuren%203.dim.%20PZ.pdf (2009c)

Toth, Alfred, Spuren und Keime. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotik, http://www.mathematical-semiotics.com/pdf/Spuren%20und%20Keime.pdf (2010a)

Toth, Alfred, Zur Einführung der Kategorien in die Semiotik. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, erscheint (2010b)

3.12.2010